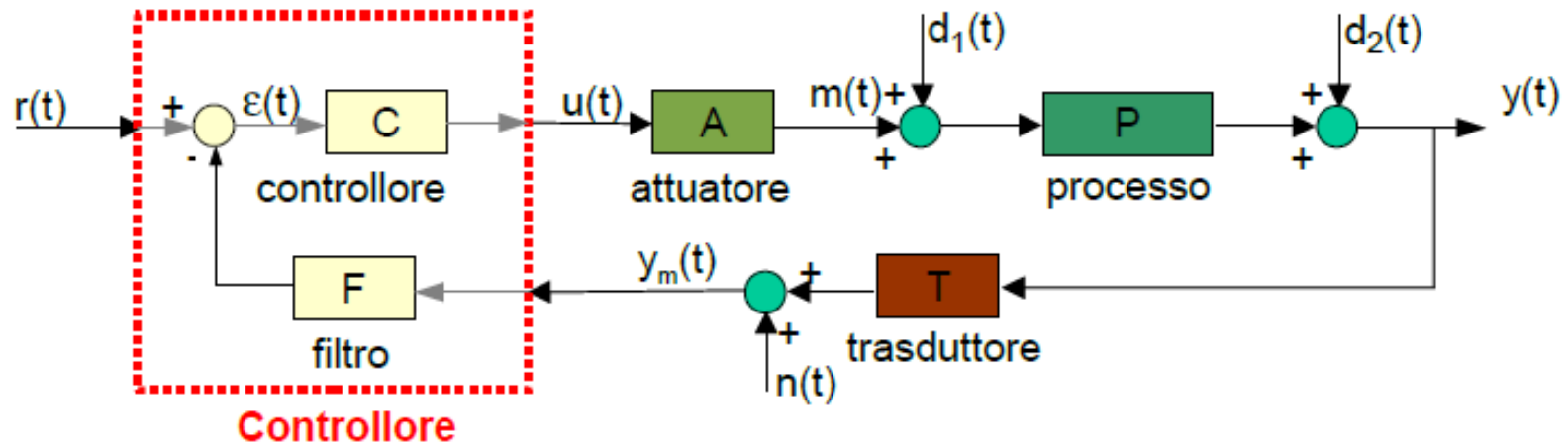


Reti lead-lag e diagrammi universali

- Rete anticipatrice (lead compensator)
- Rete attenuatrice (lag compensator)
- Rete a sella (lead-lag compensator)
- Diagrammi universali

Schema di riferimento



Nelle varie tecniche di sintesi del controllore, ed in particolare nella sintesi per compensazione in frequenza della risposta armonica a ciclo aperto, vengono utilizzate reti di correzione standard:

- Zero - Polo: **rete anticipatrice** o *lead compensator*
- Polo - Zero: **rete attenuatrice** o *lag compensator*
- Polo - Zero-Zero - Polo: **rete a sella** o *lead-lag compensator*

caratterizzate da poli e zeri reali negativi

Rete anticipatrice (lead compensator)

La rete zero-polo viene utilizzata principalmente quando si desidera un incremento significativo dei moduli a partire da una certa pulsazione

$$\Delta M > 0; \quad \omega \geq \bar{\omega}$$

e/o si desidera un incremento significativo della fase in un certo campo di pulsazioni

$$\Delta \varphi > 0; \quad \begin{aligned} \omega_1 &\leq \omega \leq \omega_2 \\ \omega_1 &< \bar{\omega} \end{aligned}$$

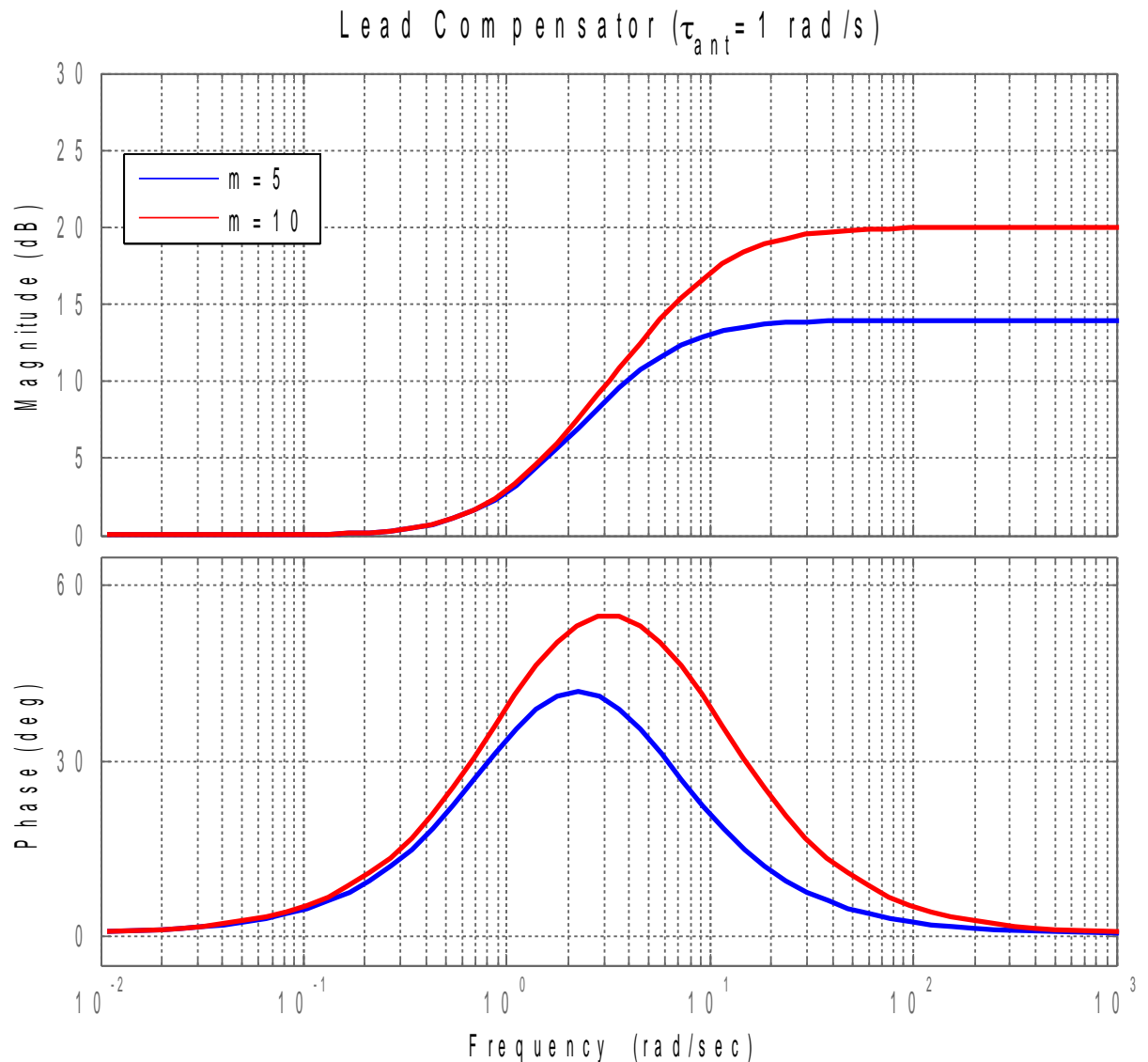
La condizione $\omega_1 < \bar{\omega}$ consente di ottenere un significativo incremento della fase anche senza modificare molto il modulo della funzione di trasferimento ad una specifica pulsazione

Rete anticipatrice (lead compensator)

La rete zero-polo è un filtro a fase minima caratterizzata da uno zero ed un polo reali, con il polo a frequenza maggiore

$$C_{ant}(s) = \frac{1 + \tau_{ant} s}{1 + \frac{\tau_{ant}}{m} s};$$

$$m > 1$$



Rete attenuatrice (lag compensator)

La rete polo-zero viene utilizzata principalmente quando si desidera una riduzione significativa dei moduli a partire da una certa pulsazione

$$\Delta M < 0; \quad \omega \geq \bar{\omega}$$

e/o si desidera una riduzione significativa della fase in un certo campo di pulsazioni

$$\Delta \varphi < 0; \quad \begin{aligned} \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \\ \omega_1 < \bar{\omega} \end{aligned}$$

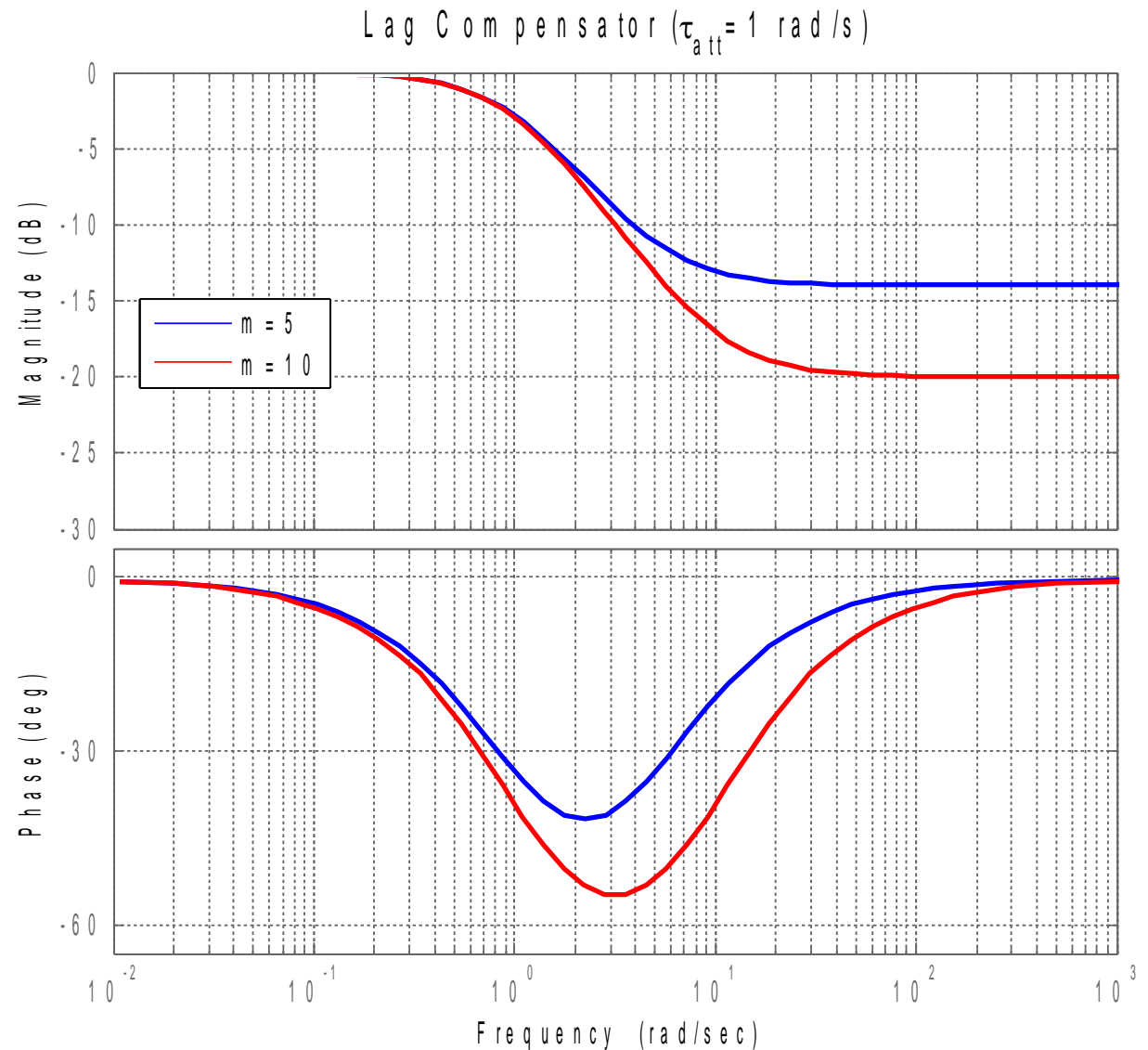
La condizione $\omega_1 < \bar{\omega}$ consente di ottenere un significativo incremento dei moduli anche senza modificare molto la fase della funzione di trasferimento ad una specifica pulsazione

Rete attenuatrice (lag compensator)

La rete polo-zero è un filtro a fase minima caratterizzata da un polo ed uno zero reali, con il polo a frequenza inferiore

$$C_{att}(s) = \frac{1 + \frac{\tau_{att}}{m}s}{1 + \tau_{att}s};$$

$$m > 1$$



Rete a sella (lead-lag compensator)

La rete polo-zero-zero-polo viene utilizzata principalmente quando si desidera una riduzione significativa dei moduli a partire da una certa pulsazione

$$\Delta M < 0; \quad \omega \geq \bar{\omega}$$

e/o si desidera un incremento significativo della fase in un certo campo di pulsazioni

$$\Delta \varphi > 0; \quad \begin{aligned} \omega_1 &\leq \omega \leq \omega_2 \\ \omega_1 &> \bar{\omega} \end{aligned}$$

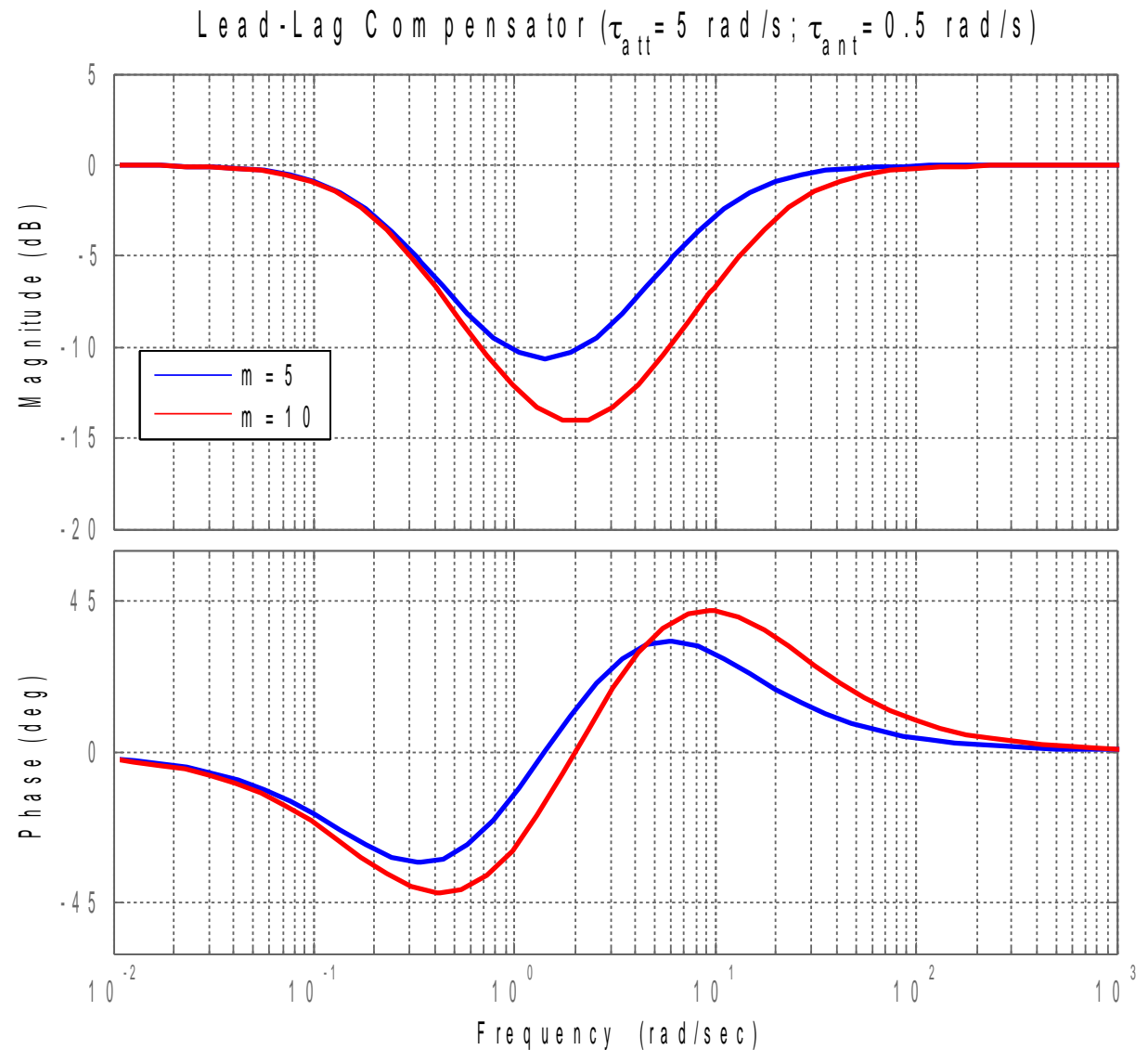
La rete a sella combina l'effetto delle reti attenuatrice ed anticipatrice in termini di riduzione dei moduli ed incremento delle fasi, rispettivamente.

Rete attenuatrice (lag compensator)

La rete polo-zero-zero-polo è un filtro a fase minima caratterizzata da due poli ed due zeri reali, con i due zeri a frequenza intermedia

$$C_{sella}(s) = \frac{1 + \frac{\tau_{att}}{m_{att}} s}{1 + \tau_{att} s} \frac{1 + \tau_{ant} s}{1 + \frac{\tau_{ant}}{m_{ant}} s};$$

$$m_{att} = m_{ant} = m > 1$$



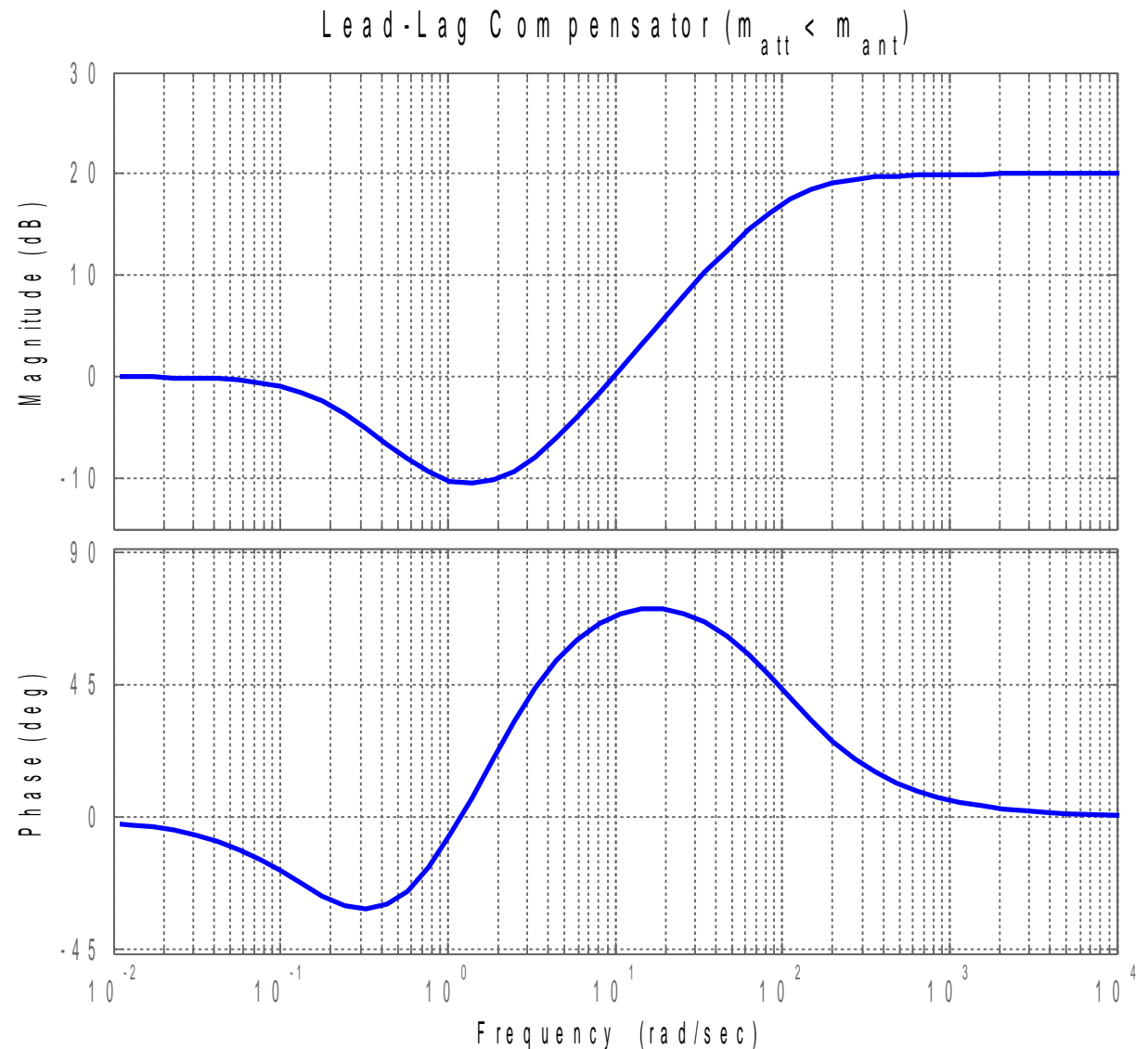
Rete attenuatrice (lag compensator)

La rete polo-zero-zero-polo è un filtro a fase minima caratterizzata da due poli ed due zeri reali, con i due zeri a frequenza intermedia.

m_{att} e m_{ant} possono essere differenti (rete a sella dissimetrica)

$$C_{sella}(s) = \frac{1 + \frac{\tau_{att}}{m_{att}} s}{1 + \tau_{att} s} \frac{1 + \tau_{ant} s}{1 + \frac{\tau_{ant}}{m_{ant}} s};$$

$$1 < m_{att} < m_{ant}$$



Diagrammi universali

Sfruttando la caratteristica che la rete attenuatrice ha una funzione di trasferimento che è l'inversa di quella di una rete anticipatrice, ed introducendo la pulsazione normalizzata

$$u = \tau \omega$$

È possibile definire un compensatore normalizzato

$$C_n(ju) = \frac{1 + ju}{1 + j \frac{u}{m}}; \quad \begin{array}{ll} 0 < m < 1 & \text{rete attenuatrice} \\ m > 1 & \text{rete anticipatrice} \end{array}$$

Diagrammi universali

L'andamento del modulo del compensatore normalizzato dipende dai valori di u ed m

$$|C_n(ju)| = \frac{\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1+\frac{u^2}{m^2}}} = m \sqrt{\frac{1+u^2}{m^2+u^2}} = \begin{matrix} \leq m ; & m > 1 \\ \geq m ; & m < 1 \end{matrix}$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} |C_n(ju)| = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} |C_n(ju)| = m$$

L'andamento del modulo ha andamento monotono per u che varia da 0 a ∞

Diagrammi universali

L'andamento della fase del compensatore normalizzato dipende dai valori di u ed m

$$C_n(ju) = \frac{1 + ju}{1 + j\frac{u}{m}} = \frac{(1 + ju)(1 - j\frac{u}{m})}{1 + \frac{u^2}{m^2}} = m \frac{(m + u^2) + ju(m - 1)}{m^2 + u^2}$$

$$\arg \{C_n(ju)\} = \arctan \left(u \frac{m - 1}{m + u^2} \right)$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \arg \{C_n(ju)\} = \lim_{u \rightarrow \infty} \arg \{C_n(ju)\} = 0$$

L'andamento del modulo non ha andamento monotono per u che varia da 0 a ∞ ma presenta un massimo/minimo

Diagrammi universali

L'andamento della fase del compensatore normalizzato dipende dai valori di u ed m e presenta un massimo/minimo per u che varia da 0 a ∞

$$\arg \{C_n(ju)\} = \varphi(u) = \arctan\left(u \frac{m-1}{m+u^2}\right)$$

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{1}{1 + \left(u \frac{m-1}{m+1}\right)^2} \left[\frac{m-1}{m+u^2} - 2u^2 \frac{m-1}{(m+u^2)^2} \right] = \frac{m-1}{(m+u^2)^2 + u^2(m-1)} (m-u^2)$$

$$\frac{d\varphi}{du} = 0 \Leftrightarrow u = \sqrt{m} \qquad \arg \{C_n(ju)\}_{u=\sqrt{m}} = \varphi(\sqrt{m}) = \arctan\left(\frac{m-1}{2\sqrt{m}}\right)$$

Il massimo (minimo) della fase della rete anticipatrice (attenuatrice) si ha in corrispondenza della pulsazione normalizzata $u = \sqrt{m}$

Diagrammi universali

Se si considera $m > 1$, la rete attenuatrice normalizzata ha una funzione di trasferimento che è l'inverso di quella della rete anticipatrice

$$C_n^{ant}(ju) = \frac{1 + ju}{1 + j\frac{u}{m}}; \quad m > 1; \quad C_n^{att}(ju) = \frac{1 + j\frac{u}{m}}{1 + ju}$$

Il diagramma di Bode della rete attenuatrice si può ottenere cambiando il segno di quello della rete anticipatrice (*modulo e fasi sempre positivi*).

Su una stessa carta semi-logaritmica è possibile tracciare più diagrammi di Bode della rete anticipatrice per valori differenti di m

Diagrammi universali

Definiti la variazione del modulo

$$\Delta M \approx \Delta \bar{M}$$

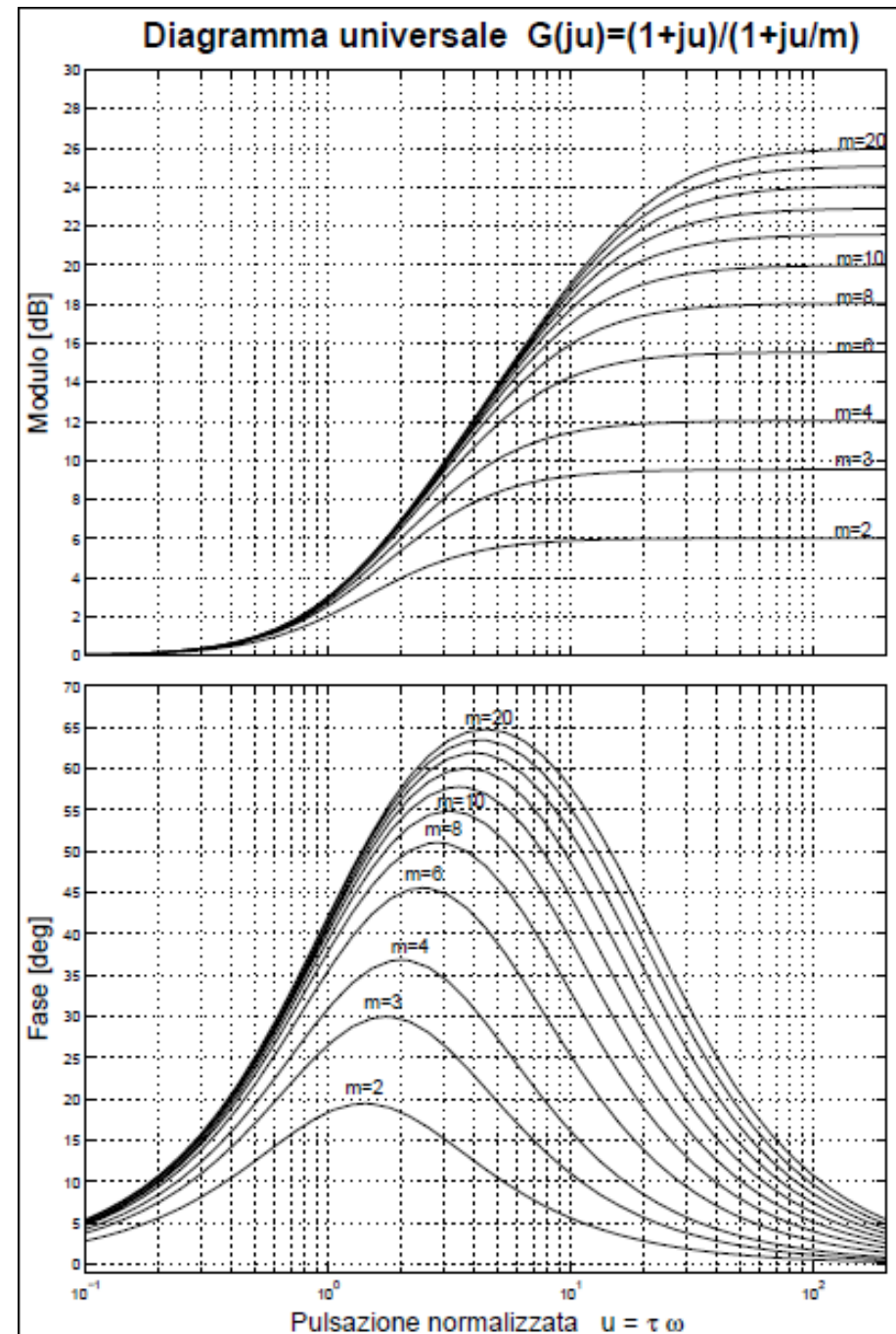
e della fase

$$\Delta \varphi \approx \Delta \bar{\varphi}$$

da introdurre ad una pulsazione specifica $\bar{\omega}$, si valutano i valori di \bar{u} ed \bar{m} che li garantiscono tramite i diagrammi universali.

Si determina quindi il valore τ della rete compensatrice mediante

$$\tau = \frac{\bar{u}}{\bar{\omega}}$$



Riepilogo

- ✓ Si sono definite le reti correttrici utilizzabili per la compensazione in frequenza della funzione di trasferimento a ciclo aperto
- ✓ Si è definita una funzione di trasferimento normalizzata con l'introduzione di una pulsazione normalizzata
- ✓ Si sono definite le caratteristiche del diagramma di Bode della funzione di trasferimento normalizzata